EPREUVE COMMUNE DE MATHEMATIQUES SECONDE

Eléments de correction

Exercice 1

Soit f la fonction dont l'expression est donnée par $f(x) = \frac{4}{x+3} - 1$.

1) La fonction f est définie partout où le dénominateur $x + 3$ ne s'annule pas.
Or, $x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$.
L'ensemble de définition de f est donc bien $\mathfrak{D}_f =]-\infty; -3[\cup]-3; +\infty[$.

2) Pour tout $x \in \mathfrak{D}_f$, $f(x) = \frac{4}{x+3} - 1 = \frac{4}{x+3} - \frac{x+3}{x+3} = \frac{4-(x+3)}{x+3} = \frac{4-x-3}{x+3} = \frac{1-x}{x+3}$.

3) Antécédent de 3 par f : on cherche $x \in \mathfrak{D}_f$ tel que $f(x) = 3$, c'est-à-dire tel que : $\frac{1-x}{x+3} = 3$.

Or, $\frac{1-x}{x+3} = 3$ $\Leftrightarrow 1 - x = 3(x+3)$
$\Leftrightarrow 1 - x = 3x + 3$
$\Leftrightarrow 1 - 3 = 3x + x$
$\Leftrightarrow -2 = 4x$
$\Leftrightarrow x = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

Conclusion : L'antécédent de 3 par f est $-\frac{1}{2}$.

4) Tableau de signes de la fonction f :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x) = \frac{1-x}{x+3}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

5) Solutions de $f(x) \leq 0$:
On en déduit que les solutions de $f(x) \leq 0$ sont les réels compris dans $]-\infty; -3[\cup [1; +\infty[$.

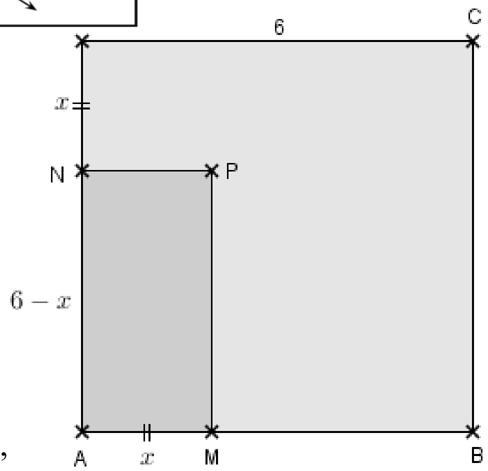
Exercice 2

1ère Partie : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 6x$.

1) Pour tout réel x, on a : $-(x-3)^2 + 9 = -(x^2 - 6x + 9) + 9 = -x^2 + 6x - 9 + 9 = -x^2 + 6x = g(x)$.
2) Tableau de variations de g :
D'après la forme canonique de la fonction g, on identifie que :
- le coefficient dominant est -1 (négatif), donc la parabole représentative de g est tournée vers le bas ;
- les coordonnées du sommet de cette parabole sont $(3; 9)$.

Il s'ensuit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
Variations de $g(x)$	↗	9	↘



2$^{\text{ème}}$ Partie :

Le carré $ABCD$ a un côté de longueur 6 cm.

M est un point sur le segment $[AB]$ tel que $AM = x$ cm.

N est un point sur le segment $[AD]$ tel que $DN = x$ cm.

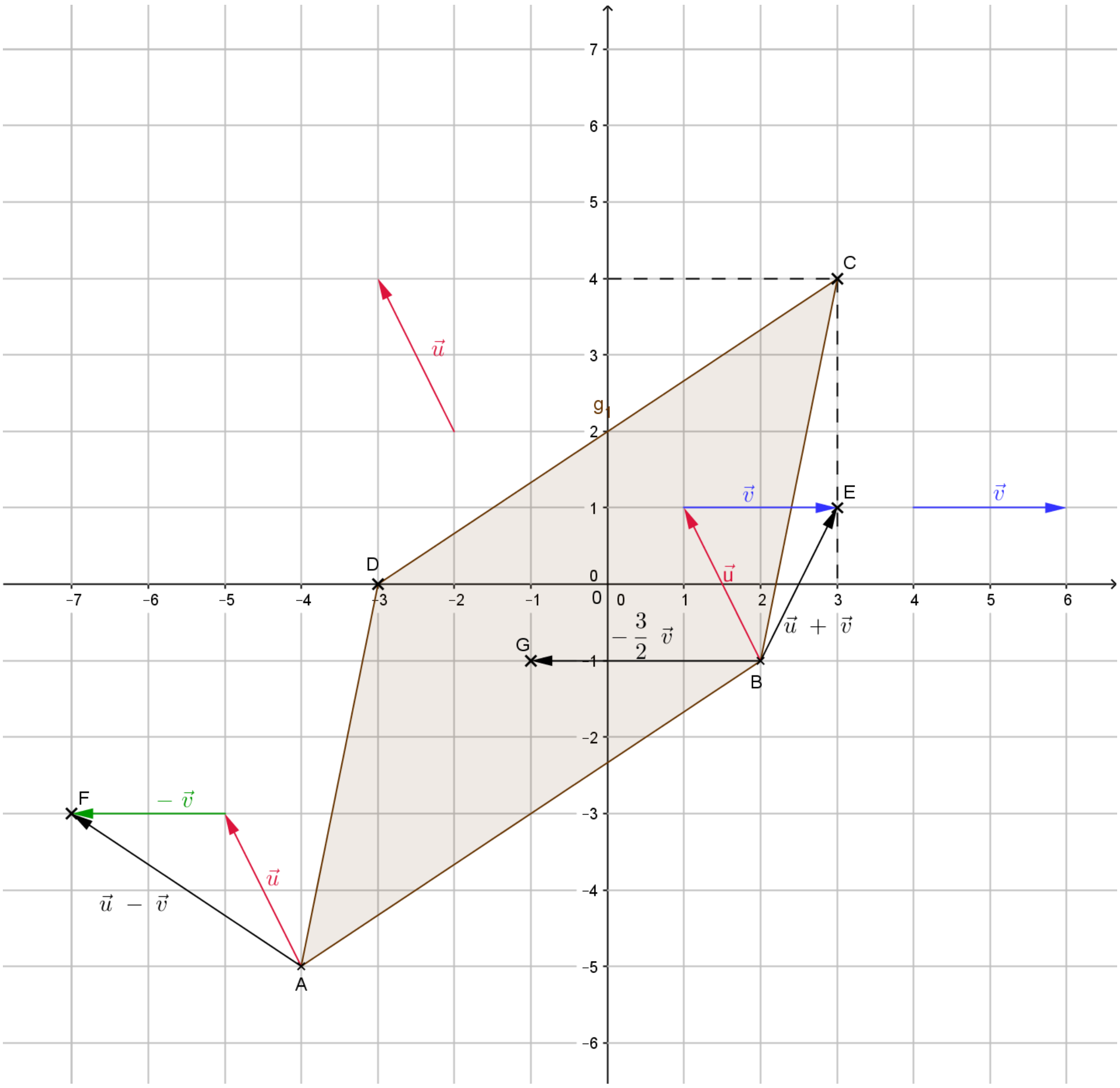
1) AN en fonction de x :
Puisque $N \in [AD]$, $AD = 6cm$ et $DN = x\ cm$, on a :
$AN = AD - ND = 6 - x$.

2) Aire du rectangle $AMPN$:
L'aire du rectangle $AMPN$ est $\mathcal{A} = L \times l = AN \times AM$.
En utilisant la réponse de la question précédente et sachant que $AM = x\ cm$, on obtient : $\mathcal{A} = (6 - x) \times x = 6x - x^2 = -x^2 + 6x = g(x)$.

3) Le tableau des variations de g, le maximum de la fonction vaut 9 et est atteint en 3. Donc, pour que l'aire du rectangle $AMPN$ soit la plus grande possible, il faut placer M à 3 cm de A, c'est-à-dire au milieu de [AB].

Exercice 3

On considère les points $A(-4; -5), B(2; -1), C(3; 4), D(-3; 0)$ ainsi que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



1) A l'aide du graphique : $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.
2) Points C et D : voir le repère.
3) Points E, F et G : voir le repère.
4) Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$:
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-(-4)\\-1-(-5)\end{pmatrix}$
   <u>Conclusion</u> : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$
5) Le quadrilatère ABCD est-il un parallélogramme ?
   Pour prouver que ABCD est un parallélogramme, il suffit de prouver l'égalité vectorielle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
   Or, deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées. Ayant déjà celles de $\overrightarrow{AB}$, calculons celles de $\overrightarrow{DC}$:
   $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}x_C - x_D\\y_C - y_D\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}3-(-3)\\4-0\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$.
   <u>Conclusion</u> : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, d'où ABCD est un parallélogramme.
6) Montrons que le triangle BCD est isocèle en B : pour cela, calculons BC et BD.
   D'une part : $BC = \sqrt{(x_c - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(3-2)^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$
   D'autre part : $BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(-3-2)^2 + (0-(-1))^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$
   Donc $BC = BD$ ce qui signifie que le triangle BCD est isocèle en B.
7) Soit $K(14;\ 8)$, les points A, B et K sont-ils alignés ?
   Dire que les points A, B et K sont alignés équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires.
   Or : $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}x_K - x_A\\y_K - y_A\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}14-(-4)\\8-(-5)\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}18\\13\end{pmatrix}$.
   On a : $x_{\overrightarrow{AK}} = 3 \times x_{\overrightarrow{AB}}$ mais $y_{\overrightarrow{AK}} \neq 3 \times y_{\overrightarrow{AB}}$
   Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK}$ ne sont pas colinéaires : les points A, B et K ne sont pas alignés.

<u>Exercice 4</u> ***… points***

Au pays imaginaire, lors des derniers résultats du Bac, le Ministre de l'éducation nationale a déclaré que 76 % des candidats du bac Surf avaient été reçus à l'examen.

Dans le département de Peter Pan, il y a eu 1109 reçus au Bac Surf, sur un total de 1500 candidats.

Au vu de ces résultats, doit-on remettre en cause l'affirmation du Ministre ?

Puisque la proportion $p = 0{,}76 \in [0{,}2; 0{,}8]$ et puisque $n = 1500 \geq 25$, les conditions d'application de l'intervalle I de fluctuation au seuil de 95% sont remplies :

$$I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}76 - \frac{1}{\sqrt{1500}}; 0{,}76 + \frac{1}{\sqrt{1500}}\right] \approx [0{,}734; 0{,}786]$$

Or, la fréquence dans le département de Peter Pan est $f = \frac{1109}{1500} \approx 0{,}739$.

On constate que $f \in I$ donc on ne peut pas remettre en cause l'affirmation du Ministre au risque d'erreur de 5%.

Exercice 5 ***5 points***

		Réponse A	Réponse B	Réponse C
Q1	Un dé à 4 faces numérotées A, B, C, D, est truqué de telle manière que : $P(A) = 0{,}1$; $P(B) = 0{,}1$ et $P(C) = 0{,}2$. Que vaut $P(D)$?	$0{,}2$	$0{,}4$	$0{,}6$
Q2	Une expérience aléatoire est telle que l'événement H a une probabilité de $0{,}74$. Quelle est la probabilité de $\overline{H}$?	$0{,}47$	$0{,}26$	$0{,}74$
Q3	A et B sont deux événements tels que : $P(A) = 0{,}2$; $P(B) = 0{,}24$ et $P(A \cap B) = 0{,}12$. Que vaut $P(A \cup B)$?	$0{,}56$	$0{,}44$	$0{,}32$
Q4	On lance une fois un dé équilibré à 6 faces notées de 1 à 6. La probabilité d'obtenir un résultat supérieur ou égal à 4 est :	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{2}$
Q5	Quelle est la probabilité d'avoir toutes les bonnes réponses si on répond au hasard à ce QCM ?	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{125}$